Matrices. Operaciones con matrices.

Ejercicio 1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

seleccione las que se pueden sumar y súmelas.

Ejercicio 2. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcule:

a. $A - B + C$

b. $3A + 2(B - C)$

c. $3(2A - C)$

Ejercicio 3. Dados los vectores

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a. halle los productos escalares que sean posibles

b. halle $(2\vec{a}) \cdot \vec{c}$

c. halle $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$

Ejercicio 4. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a. seleccione las que se pueden multiplicar

b. haga alguna de dichas multiplicaciones

c. halle $C(2G + F)$

d. halle A^t y B^t

Ejercicio 5. Determine el valor de d para que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean ortogonales si

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 2d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} d+2 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ¿para qué valores de a, b, c y d, se cumple que $AG = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Ejercicio 7. Demuestre que si A y B son matrices que conmutan, entonces $(AB)^2 = A^2B^2$.

Ejercicio 8. Si A y B son matrices $n \times n$ entonces, ¿se cumplirá que $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$? Justifique su respuesta.

Ejercicio 9. Sean A y B matrices $n \times n$. Demuestre que $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

Sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

Ejercicio 10. Resolver el sistema

$$\begin{aligned}2x_1+3x_2-x_3 &= 5\\ 4x_1+4x_2-3x_3 &= 3\\ -2x_1+3x_2-x_3 &= 1\end{aligned}$$

a. utilizando el método de Gauss

b. utilizando el método de Gauss–Jordan

Ejercicio 11. Resolver el sistema

$$\begin{aligned}2x_1-x_2+x_3 &= 6\\ x_1+x_2-2x_3 &= 4\\ 5x_1+2x_2-5x_3 &= 18\end{aligned}$$

Ejercicio 12. Resolver el sistema

$$\begin{aligned}x_1+2x_2+x_3 &= 3\\ 2x_1+3x_2+x_3 &= 5\\ 3x_1+5x_2+2x_3 &= 1\end{aligned}$$

Ejercicio 13. Por medio de preguntas formuladas a los estudiantes concluir lo siguiente: dado un sistema homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas,

a. si $m=n$, el sistema homogéneo puede tener infinitas soluciones o solución única trivial

b. si $m<n$, el sistema homogéneo tiene infinitas soluciones

Ejemplos:

a. El sistema

$$\begin{aligned}3x_1+2x_2+x_3 &= 0\\ 7x_1+6x_2+5x_3 &= 0\\ 5x_1+4x_2+3x_3 &= 0\end{aligned}$$

tiene infinitas soluciones.

b. El sistema

$$\begin{aligned}2x_1+x_2+\frac{1}{2}x_3 &= 0\\ x_1-\frac{3}{2}x_2 &= 0\\ x_1+\frac{1}{2}x_2-x_3 &= 0\end{aligned}$$

tiene solución única trivial.

c. El sistema

$$\begin{aligned}x_1+4x_2+2x_3-3x_5 &= 0\\ 2x_1+9x_2+5x_3+2x_4+x_5 &= 0\\ x_1+3x_2+x_3-2x_4-9x_5 &= 0\end{aligned}$$

tiene infinitas soluciones.

Ejercicio 14. Resuelva el sistema

$$\begin{aligned}x_1+2x_3+3x_4+4x_5 &= 5\\ x_1+2x_2+7x_3+7x_4+5x_5 &= 7\\ 2x_1+2x_2+9x_3+10x_4+9x_5 &= 13\end{aligned}$$

Ejercicio 15. Determinar los valores de α y β para que el sistema

$$\begin{aligned}-\beta x_1+(\beta+2)x_2-x_3 &= 0\\ 2x_1-4x_2+x_3 &= 0\\ x_1-x_2+(\alpha-1)x_3 &= 0\end{aligned}$$

a. sea inconsistente,

b. tenga infinitas soluciones,

c. tenga solución única.

Ejercicio 16. Demuestre que si el sistema homogéneo

$$\begin{aligned}(a-r)x_1+dx_2 &= 0\\ cx_1+(b-r)x_2 &= 0\end{aligned}$$

tiene solución no trivial, entonces r satisface la euación

$$(a-r)(b-r)-cd=0.$$

Inversa de una matriz cuadrada.

Ejercicio 17. Sean A, B, C y D matrices $n \times n$. Si todas ellas son invertibles, muestre que

$$(ABCD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$$

Ejercicio 18. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Calcular A^{-1}, si existe.

Ejercicio 19. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Calcular A^{-1}, si existe.

Ejercicio 20. Si A y B son matrices $n \times n$, probar que

$$(ABA^{-1} + C^t)^t = (A^t)^{-1}B^tA^t + C.$$

Ejercicio 21. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -b \\ 2 & b & 2 \end{pmatrix}$.

a. ¿Para qué valores de b es invertible?

b. Calcule la inversa para el menor valor b entero positivo que garantice su existencia.

Ejercicio 22. Calcule la inversa de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 23. Sea A una matriz invertible $n \times n$. Demuestre que si B es una matriz $n \times m$ tal que $AB = 0$, entonces $B = 0$.

Ejercicio 24. Demuestre que si A es una matriz 2×1 y B es una matriz 1×2, entonces $C = AB$ no es invertible.

Ejercicio 25. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \\ 2 & 2 & 5b & 0 \end{pmatrix}$$

a. Halle las condiciones que deben cumplir a y b para que A sea invertible.

b. Halle la inversa de A si $a = \frac{4}{3}$ y $b = -\frac{1}{10}$.

Ejercicio 26. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Calcular A^{-1} y resolver el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$.

Ejercicio 27. Sean A y B matrices cuadradas. Diga cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justifique cada respuesta.

a. Si $B = A + A^t$, entonces $B^t = B$.

b. Si $A = A^t$ y $B = -B^t$, entonces $AB = -(AB)^t$.

Determinantes.

Ejercicio 28. Calcular $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

Ejercicio 29. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, hallar

a. los menores M_{12}, M_{31} y M_{23}

b. los cofactores A_{12}, A_{31} y A_{23}

Ejercicio 30. Calcular $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

Ejercicio 31. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Calcular $\det A$ y $\det B$.

b. ¿Es A invertible? ¿Es B invertible?

Ejercicio 32. Si $\det D = 6$ y $\det E = 5$, demuestre que $\det(D^t E)^t = 30$.

Ejercicio 33. Determinar, sin efectuar cálculos, cuáles de los siguientes determinantes son nulos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \det B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \qquad |D| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|E| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 34. Si A es una matriz 10×10 y se conoce que $\det A = 24$, calcule $\det B$ en los siguientes casos

a. la matriz B se obtiene al multiplicar por $\frac{1}{3}$ la tercera fila de A y por $\frac{1}{2}$ su octava fila

b. la matriz B se obtiene sumándole a la segunda columna de la matriz A la quinta columna multiplicada por 6

c. la matriz B se obtiene intercambiando la segunda fila con la cuarta y la quinta con la tercera en la matriz A

Ejercicio 35. Dada $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule $\det A$.

Ejercicio 36. Calcule el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z & w \\ -x & y & \alpha & \beta \\ -x & -y & z & \gamma \\ -x & -y & -z & w \end{pmatrix}$$

Ejercicio 37. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -b \\ 2 & b & 2 \end{pmatrix}$, ¿para qué valores de b es invertible?

Ejercicio 38. Dada la matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

a. calcular adj A

b. calcular A^{-1}

Ejercicio 39. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Calcule $\det A$.

b. Halle B^t.

c. Usando el valor hallado de $\det A$ y las propiedades de los determinantes, halle $\det B^t$.

d. Sin calcular AB, determine si AB es invertible y en caso afirmativo halle $\det(AB)^{-1}$.

Ejercicio 40. Sean A, B y C matrices 4×4. Sea $\det A = \frac{1}{4}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Calcule $\det C$ si $\left(C^{-1}BA\right)^t = I$.

Ejercicio 41. Considere la siguiente matriz cuadrada de orden n

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcule $\det A$.

Ejercicio 42. Sea A una matriz 3×3 con $\det A = 2$. Hallar

a. $\det(A^2)$

b. $\det(4A)$

c. $\det(A + A)$

d. $\det(A^t)$

e. $\det(A^{-1})$

f. $\det(A^k)$

Ejercicio 43. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas para A y B matrices cuadradas. Justifique sus respuestas.

a. $\det(A + B) = \det A + \det B$

b. $\det(A + B)^2 = (\det(A + B))^2$

c. $\det(A + B)^2 = \det(A^2 + B^2)$

d. $\det(\alpha A) = \alpha \det A$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

e. si $B = M^{-1}AM^t$, entonces $\det B = \det A$

f. si $\det A = 4$, $\det B = 6$ y $\det C = 5$, entonces

$$\det\left(\left(A^{-1}B^tC\right)^t\right) = \frac{15}{2}$$

Ejercicio 44.

a. Demuestre que si A es una matriz cuadrada entonces $(\text{adj } A)^t = \text{adj } (A^t)$.

b. Usando lo anterior, demuestre que si A es simétrica entonces adj A también lo es.

Ejercicio 45. Conociendo que la inversa de cierta matriz A es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Halle el cofactor A_{32} de la matriz A sin hallar A.

b. Halle el determinante de la adjunta de A.

Vectores en el plano y en el espacio.

Ejercicio 46. Calcular la longitud de los vectores $\vec{v} = (-\sqrt{3}, 3\sqrt{2})$ y $\vec{u} = (-\sqrt{3}, 3\sqrt{2}, 2)$.

Ejercicio 47. Dados los vectores $\vec{v} = (-\sqrt{3}, 3\sqrt{2})$ y $\vec{u} = (-\sqrt{3}, 3\sqrt{2}, 2)$, halle $2\vec{v}$, $-3\vec{u}$, $|2\vec{v}|$ y $|-3\vec{u}|$.

Ejercicio 48. Dados los vectores $\vec{u} = \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{\imath} - \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{\jmath}$ y $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{\imath} + \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{\jmath} + \frac{2}{\sqrt{6}}\hat{k}$, muestre que son vectores unitarios y halle sus cosenos directores.

Ejercicio 49. Dados $\vec{v} = \frac{1}{2}(\hat{\imath} - 2\hat{\jmath})$ y $\vec{w} = (3, -2, 5)$

a. halle la dirección de $\vec{v}$ y de $\vec{w}$

b. calcule los cosenos directores de $\vec{v}$ y $\vec{w}$

Ejercicio 50. Halle el vector $\vec{v}$ de longitud 4 cuyos cosenos directores son $\frac{6}{11}$, $\frac{7}{11}$ y $\frac{-6}{11}$.

Ejercicio 51. Dados los puntos $A(2, -1, 5)$, $B(5, 5, 8)$ y $C(7, 9, 10)$, hallar el coseno del ángulo entre los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

Ejercicio 52. Dados los vectores $\vec{u} = 3\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + \frac{1}{2}\hat{k}$, $\vec{v} = \hat{\imath} - \frac{5}{3}\hat{\jmath} + \frac{1}{6}\hat{k}$ y $\vec{w} = (2, 1, -2)$, determinar cuáles son paralelos y cuáles son ortogonales.

Ejercicio 53. Hallar la proyección del vector $\vec{v} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$ sobre la dirección del vector $\vec{u} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 3\hat{k}$.

Ejercicio 54. Hallar el vector $\vec{w}$ que es perpendicular simultáneamente al vector $\vec{v} = (3, 6, 8)$ y al eje de las x.

Ejercicio 55. Calcular el seno del ángulo entre las diagonales del paralelogramo construido con los vectores $\vec{u} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$ y $\vec{v} = \hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + \hat{k}$.

Ejercicio 56. Hallar el área del paralelogramo cuyos lados son los vectores $\vec{u} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$ y $\vec{v} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$.

Ejercicio 57. Hallar el volumen y la altura del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{u} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 5\hat{k}$, $\vec{v} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} + 4\hat{k}$ y $\vec{w} = \hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + \hat{k}$.

Ejercicio 58. Determinar si $\vec{u} = -3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ y $\vec{v} = 6\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ son vectores paralelos.

Ejercicio 59. Demostrar que si tres vectores son coplanares, entonces el triple producto escalar es igual a cero.

Ejercicio 60. Verificar si son coplanares los vectores $\vec{u} = (7, 4, 6)$, $\vec{v} = (2, 1, 1)$ y $\vec{w} = (19, 11, 17)$.

Ejercicio 61. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son $A(3, 2, -1)$, $B(2, 4, 6)$ y $C(-1, 2, 7)$.

Ejercicio 62. Sea el punto $a = (1, 2)$, halle b tal que $\overrightarrow{ab} = (-4, 3)$.

Ejercicio 63. Demuestre que si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son paralelos y $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$, entonces $x = y = 0$.

Ejercicio 64. Demuestre que si $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores en $\mathbb{R}^2$ tales que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$, entonces $\vec{v} = \vec{w}$.

Ejercicio 65. Dados $\vec{a} = 4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$ y $\vec{b} = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath}$, encuentre escalares k y m tales que $\vec{r} = k\vec{a} + m\vec{b}$, donde $\vec{r} = 6\hat{\imath} - 7\hat{\jmath}$.

Ejercicio 66. Demuestre que los tres vectores $\vec{a} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}$ y $\vec{c} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 4\hat{k}$ forman un triángulo rectángulo.

Ejercicio 67. Demuestre que $(4, 5, 2)$, $(1, 7, 3)$ y $(2, 4, 5)$ son los vértices de un triángulo equilátero.

Ejercicio 68. Sean $A(2, -1, 1)$ y $B(3, -4, -4)$, halle un punto C en $\mathbb{R}^3$ tal que A, B y C sean los vértices de un triángulo rectángulo.

Rectas y planos en el espacio.

Ejercicio 69. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1,-2,0)$ y su vector director es $\vec{v} = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$.

Ejercicio 70. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $P(1,0,-1)$ y $Q(3,1,1)$.

Ejercicio 71. Hallar la ecuación de la recta L_1 que contiene al punto $(-1,2,1)$ y es paralela a la recta

$$L_2\colon\ x = 3+2t, \quad y = -t, \quad z = 2-3t.$$

Ejercicio 72. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-4,7,3)$ y es perpendicular a las rectas

$$L_1\colon \quad \frac{x-2}{-4} = \frac{y+3}{-7} = \frac{z+1}{3} \quad \text{y}$$
$$L_2\colon \quad \frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+3}{-2}.$$

Ejercicio 73. Hallar la ecuación de la recta L que pasa por el punto $(1,-2,4)$, es paralela a la recta

$$L_1\colon\ x = 2, \quad y = -3+2t, \quad z = 1+3t$$

y también paralela al eje z.

Ejercicio 74. Hallar el ángulo formado por las rectas

$$L_1\colon \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-5}{2} \quad \text{y}$$
$$L_2\colon \quad \frac{x}{2} = \frac{y-3}{9} = \frac{z+1}{6}.$$

Ejercicio 75. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(7,-4,-4)$ y su vector normal es $\vec{\eta} = 6\hat{\imath} - 7\hat{\jmath} + 6\hat{k}$.

Ejercicio 76. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $P(2,-1,4)$, $Q(3,2,-1)$ y $M(1,-2,3)$.

Ejercicio 77. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(-1,2,-2)$ y es perpendicular a la recta $x = 2+t$, $y = 3t$, $z = 1-t$.

Ejercicio 78. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $P(-1,-2,-2)$, $Q(-1,-2,1)$ y es paralelo a la recta

$$L\colon\ \frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{3}.$$

Ejercicio 79. Dados los planos $\Pi_1\colon x-2y+z=-3$ y $\Pi_2\colon\ 2x-3y-3z=-3$, determinar:

a. si son paralelos,

b. si se intersectan, hallar las ecuaciones de la recta de intersección,

c. si son ortogonales.

Ejercicio 80. Dados los planos $\Pi_1\colon\ x-y+z=3$, $\Pi_2\colon\ -3x+3y-3z=-9$ y $\Pi_3\colon\ -3x+3y-3z=-8$, determinar si Π_1 y Π_2, y si Π_1 y Π_3 son

a. ortogonales

b. paralelos

c. coincidentes (el mismo plano)

Ejercicio 81. Hallar el ángulo entre los planos $\Pi_1\colon\ x-2y+z=-3$ y $\Pi_2\colon\ 2x-3y-3x=-3$.

Ejercicio 82. Hallar el punto de intersección de la recta $\frac{x-7}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}$ y el plano $2x+y+7z-3=0$.

Ejercicio 83. Hallar la proyección del punto $Q(4,-3,1)$ sobre el plano $\Pi\colon\ x+2y-z-3=0$.

Ejercicio 84. Hallar la distancia del punto $Q(4,-3,1)$ al plano $\Pi\colon\ x+2y-z-3=0$.

Ejercicio 85. Hallar el ángulo que forma el plano $x + y + 2z - 4 = 0$ con la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1}$.

Ejercicio 86. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3, 3, 0)$ y es perpendicular al plano $x + 3y - z = 7$.

Ejercicio 87. Hallar la ecuación de la recta L contenida en el plano $\Pi\colon\ 3x - 4y - 2z = -5$, que pasa por el punto $P(1, 8, -12)$ y que es perpendicular otra recta $L_2\colon\ \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$ que está en el plano Π.

Ejercicio 88. Hallar la ecuación de la recta que está en el plano yz, pasa por el origen y es perpendicular a la recta

$$L\colon\ \begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + 2z = -2. \end{cases}$$

Ejercicio 89. Hallar la ecuación del plano Π que pasa por el punto $P(2, 2, -1)$ y es perpendicular a la recta

$$L\colon\ \begin{cases} x + 3y - z - 7 = 0 \\ 2x - y - z = 0. \end{cases}$$

Ejercicio 90. Hallar la ecuación del plano Π que es paralelo a la recta $L\colon\ \begin{cases} x + 3y + 5z - 4 = 0 \\ x - y - 2z + 7 = 0 \end{cases}$ y que contiene al eje y.

Ejercicio 91. Hallar la ecuación de la recta L que pasa por el origen, es paralela al plano $\Pi\colon\ 16x - 27y + 14z - 159 = 0$ y perpendicular a la recta $L\colon\ \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-4}{4}$.

Ejercicio 92. Hallar la ecuación de la recta L que está contenida en el plano $\Pi_1\colon\ x + 3y - z - 7 = 0$ y en el plano Π que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a Π_1 y a $\Pi_2\colon\ 2x - y + 5z + 3 = 0$.

Ejercicio 93. Hallar las ecuaciones del plano que pasa por el punto $M(3, 4, -5)$ y es paralelo a los dos vectores $\vec{a} = (3, 1, -1)$ y $\vec{b} = (1, -2, 1)$.

Ejercicio 94. Demostrar que la ecuación del plano que pasa por el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y es paralelo a los vectores $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ se puede representar en la forma

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ejercicio 95. Halle los valores de l y m para que las ecuaciones

$$2x + ly + 3z - 5 = 0 \quad \text{y} \quad mx - 6y - 6z + 2 = 0$$

determinan planos paralelos.

Ejercicio 96. Halle para qué valor de l las ecuaciones

$$5x + y - 3z - 2 = 0 \quad \text{y} \quad 2x + ly - 3z + 1 = 0$$

determinan planos perpendiculares.

Ejercicio 97. Hallar la proyección del punto $P(2, -1, 3)$ sobre la recta

$$x = 3t, \quad y = -7 + 5t, \quad z = 2 + 2t.$$

Ejercicio 98. ¿Para qué valores de A y B el plano $Ax + By + 3z - 5 = 0$ es perpendicular a la recta $x = 3 + 2t$, $y = 5 - 3t$, $z = -2 - 2t$?

Espacios vectoriales. Subespacios

Ejercicio 99. Investigar si el subconjunto $H = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a - 2b = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 100. Investigar si el subconjunto $H = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a - 3c = 2\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 101. Sea

$$H = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} \ : \ a = 2b + c \right\}.$$

Demuestre que H es un subespacio de $M_{2\times 2}$.

Ejercicio 102. Sean

$$V = \{P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, 2\}$$
$$H = \left\{ P(x) \in V \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{la suma de los coeficientes} \\ \text{de } P(x) \text{ vale cero} \end{array} \right\}$$

Pruebe que H es un subespacio de V.

Ejercicio 103. Considere el espacio vectorial $M_{3\times 3}$. Sea V un subconjunto de $M_{3\times 3}$ cuyos elementos son matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & d & 0 \\ d & b & e \\ 0 & e & c \end{pmatrix}$$

y sea W el subconjunto de $M_{3\times 3}$ cuyos elementos son matrices triangulares superiores.

a. Sea $H = V \cap W$. Encuentre H en forma explícita.

b. Verifique si H es o no un subespacio de $M_{3\times 3}$.

Ejercicio 104. Sean

$$\begin{aligned} H_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x - y - z = 0\} \qquad \text{y} \\ H_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + 2y + 3z = 0\} \end{aligned}$$

subespacios de $\mathbb{R}^3$. Comprobar que

$$H_1 \cap H_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{array} \right\}$$

es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 105. Sea W el conjunto de todas las matrices reales de $M_{2\times 2}$ de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A$.

a. Pruebe que $W = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

b. Pruebe que W es un subespacio de $M_{2\times 2}$.

Ejercicio 106. Sea V el espacio vectorial de las funciones continuas en $(a, b) \in \mathbb{R}$. Demuestre si los siguientes conjuntoss son o no subespacios de V.

a. $H_1 = \{h \in V \mid h \text{ es una función impar}\}$

b. $H_2 = \{h \in V \mid h(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\}$

c. $H_3 = \{h \in V \mid h(x) = h(1 - x),\ \forall x \in [0, 1]\}$

Combinación lineal. Espacio generado. Independencia lineal. Base y dimensión.

Ejercicio 107. Exprese, si es posible, el vector $M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de los vectores $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 108. Exprese, si es posible, el vector $(1, 0, 3, 2, 2)$ como combinación lineal de los vectores $(1, 1, 3, 0, 1)$, $(0, 3, 0, 2, 5)$ y $(3, 3, 1, 1, 4)$.

Ejercicio 109. Exprese el vector $P(x) = 3x^2 + 6x + 20$ como combinación lineal de los vectores $P^{(1)}(x) = x^2 - 3x + 5$ y $P^{(2)}(x) = x^2 + 6$.

Ejercicio 110. Pruebe que cualquier matriz simétrica de orden 2×2 se puede expresar como combinación lineal de las matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 111. Determine el subespacio vectorial generado por el conjunto generador $\{(1, 2, 0, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 3, 1, 0), (1, 4, 2, 2)\} \subset \mathbb{R}^4$.

Ejercicio 112. Determine el subespacio vectorial generado por el conjunto generador $\{(1, 3, 5), (2, 1, 3), (2, 1, 1), (0, 1, 1)\}$.

Ejercicio 113. Halle el subespacio vectorial generado por $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ejercicio 114. Hallar el subespacio vectorial generado por $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ejercicio 115. Hallar el espacio vectorial generado por los polinomios $P_2^{(1)}(t) = 1 + t^2$ y $P_2^{(2)}(t) = t + t^2$ de grado 2.

Ejercicio 116. Hallar el espacio generado por los polinomios de grado dos

$$P_2^{(1)} = 1 + t^2, \quad P_2^{(2)} = t + t^2, \quad P_2^{(3)} = 1 + t + t^2.$$

Ejercicio 117. Determinar si el siguiente conjunto de vectores es linealmente independiente (l.i.) o linealmente dependiente (l.d.)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ejercicio 118. Determinar si el siguiente conjunto de vectores es l.i. o l.d.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ejercicio 119. Determinar si el siguiente conjunto de vectores es l.i. o l.d.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ejercicio 120. Sea $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ un conjunto de vectores l.i. Determinar si $\{\vec{v}_1 + 5\vec{v}_3, \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \vec{v}_2 + 5\vec{v}_3\}$ es l.i. o l.d.

Ejercicio 121. Seleccione una base para el conjunto de vectores

$$H = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \, : \, a + 3b - 2c = 0, \, d = 0\}.$$

Ejercicio 122. Determinar si el conjunto de vectores $B = \{(1,3,5),(0,1,1),(4,1,9)\} \subset \mathbb{R}^3$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 123. Halle una base para el subespacio de P_2, $H = \{a+bx+cx^2 \in P_2 \,:\, b = 2a - c\}$.

Ejercicio 124. Hallar una base para el subespacio de $M_{2\times 2}$, $H = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} \,:\, a+3b = 0\right\}$.

Ejercicio 125. Determinar si el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$, $B = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 126. Dado el conjunto de vectores $B = \left\{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

a. Halle el subespacio H generado por B

b. Halle una base para H y $\dim H$.

c. Determine si B es una base para H.

d. Complete la base hallada hasta obtener una base de $M_{2\times 2}$.

e. Halle un generador l.d. de $M_{2\times 2}$.

Ejercicio 127. Dado el espacio

$$H = \{a+bx+cx^2+dx^3 \in P_3 \,:\, b = a-c,\ d = 2a+c\}$$

a. Halle una base para H.

b. Complete la base hallada hasta obtener una base de P_3.

c. Halle un generador l.d. de P_3.

Ejercicio 128. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $H = \{B \in M_{2\times 2} \,:\, AB = BA\}$

a. Halle la dimensión y una base de H.

b. Complete la base hallada hasta obtener una base de $M_{2\times 2}$.

Ejercicio 129. Calcule el valor de α para que el polinomio $p(x) = 8+16x+(1+\alpha)x^2$ está en el espacio generado por $r(x) = 1+x+2x^2$ y $q(x) = 8x+3x^2$.

Ejercicio 130. Pruebe que si el conjunto $S_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}\}$ genera un espacio vectorial V y v_{n+1} es combinación lineal de los elementos de $S_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, entonces S_2 genera a V.

Ejercicio 131. Sea $\{v_1, \ldots, v_k\}$ un conjunto l.i. del espacio vectorial V. Demuestre que el conjunto $\{v_1+v_2, v_2+v_3, \ldots, v_{k-1}+v_k, v_k\}$ es l.i.

Ejercicio 132. Suponga que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de un espacio vectorial V. Decida si el subconjunto $\{v_1+v_2, 2v_1+v_3, v_2+v_3\}$ es también una base de V.

Ejercicio 133. Sea V el conjunto de las matrices de la forma $\begin{pmatrix} x & y \\ -x & z \end{pmatrix}$ y W el conjunto de las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & -c \\ b & c \end{pmatrix}$, donde $a,b,c,x,y,z \in \mathbb{R}$.

a. Pruebe que V y W son subespacios de $M_{2\times 2}$.

b. Encuentre la forma general de un elemento de $H = V \cap W$.

c. Halle la base y la dimensión de V, W y H.

Rango, nulidad, espacio fila y espacio columna.

Ejercicio 134. Hallar una base y la dimensión del espaico nulo

$N_A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0,\ x_1 + x_3 - 3x_4 = 0\}.$

Ejercicio 135. Sea $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -4 & 8 \\ 3 & -9 & 6 & -12 & 24 \\ -2 & 6 & -5 & 11 & -18 \\ 1 & -3 & 6 & -16 & 16 \end{pmatrix}$

a. encuentre una base para F_A

b. encuentre una base para C_A

c. encuentre una base para N_A

Ejercicio 136. Determinar si el sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 3 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

tiene solución.

Ejercicio 137. Determinar si el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 7x_4 + 5x_5 &= 7 \\ 2x_1 + 2x_2 + 9x_3 + 10x_4 + 9x_5 &= 13 \end{aligned}$$

tiene solución.

Ejercicio 138. Sea $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 7 & 11 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}$

a. Si $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, halle condiciones sobre los b_i para que $b \in C_A$.

b. Encuentre bases para N_A y C_A.

c. Calcule $\dim N_A$ y $\dim C_A$.

Ejercicio 139. Sea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a. Halle una base para el espacio columna de A.

b. Halle el rango y la nulidad de A.

c. Determine si $(-5, -10, 1, -11, 20)$ está en el espacio columna de A.

d. Halle una base para el espacio nulo de A.

e. Halle una base para el espacio fila de A.

f. ¿Para qué vectores $\vec{b}$ tiene solución sistema $A\vec{x} = \vec{b}$?

Espacios con producto interno. Proyección ortogonal.

Ejercicio 140. En $\mathbb{R}^2$ sea $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$ y sea $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 - x_2y_2$.

a. ¿Define esta operación un producto interno sobre $\mathbb{R}^2$?

b. ¿Cuáles axiomas del producto interno se cumplen?

Ejercicio 141. Sean $(3 + i, 2 + 4i, -4 + 2i)$ y $(1 - i, -2 + i, 1 + i) \in \mathbb{C}^3$. Compruebe si son ortogonales y halle la norma del segundo vector.

Ejercicio 142. Encuentre una base ortonormal para el subespacio

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x - 2y + z = 0 \right\}.$$

Ejercicio 143. Hallar una base ortonormal para $P_2[0, 1]$.

Ejercicio 144. Encuentre una base ortonormal para D_2 (matrices diagonales de orden 2).

Ejercicio 145. Encuentre una base ortonormal para

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} \ : \ a = b - 2d \right\}.$$

Ejercicio 146. Sea H un subespacio definido por

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ 3x - 2y + 6z = 0 \right\}$$

y $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Calcule $\text{proy}_H \vec{v}$.

Ejercicio 147. Sea H un subespacio definido por

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ x = y, \, w = 3y \right\}$$

y $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Hallar

a. $H^\perp$

b. una base para $H^\perp$

c. $\text{proy}_{H^\perp} \vec{v}$

Ejercicio 148. Considere el subespacio

$$H = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ -4/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

y $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Halle

a. $\text{proy}_{H^\perp} \vec{v}$

b. la distancia de $\vec{v}$ a $H^\perp$

Ejercicio 149. Sea $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ una base ortogonal de $H^\perp$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, halle

a. $\text{proy}_{H^\perp} \vec{v}$

b. la distancia de $\vec{v}$ a H

c. $\dim H$

Ejercicio 150. Considere el espacio vectorial $V = C[0,2]$ con el producto interno dado por $(f,g) = \int_0^2 f(x)g(x)\mathrm{d}x$. Demuestre que el polinomio constante g más cercano a $f(x) = e^x$ es $g(x) = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$.

Ejercicio 151. Considere el espacio de las funciones reales, continuas, definidas en $[-1,1]$, con el producto interno $(f,g) = \int_{-1}^1 x^2 f(x)g(x)\mathrm{d}x$. ¿Para qué valores de k, el conjunto de las funciones $\{1, x, x^2 - k\}$ es una base ortogonal del espacio de polinomios de grado a lo sumo 2?

Ejercicio 152. Sea $A = \begin{pmatrix} i & 0 & i+2 \\ 2 & i & 2i+1 \\ 4i & 1 & 7 \end{pmatrix}$

a. halle $\rho(A)$ y $\nu(A)$

b. halle una base ortonormal para N_A

Ejercicio 153. En P_2, con producto

$$(f,g) = \int_0^1 x f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

a. ¿Es (f,g) un producto interno?

b. Halle una base para el complemento ortogonal de $H = \text{gen}\{1, x\}$.

c. Halle una base ortonormal para $H^\perp$

Ejercicio 154. Considere $\mathbb{C}^3$ con el producto interno canónico. Halle una base ortonormal para el subespacio generado por $\beta_1 = (1, 0, i)$ y $\beta_2 = (2, 1, 1+i)$.

Transformaciones lineales. Matriz asociada a una transformación lineal.

Ejercicio 155. Verificar si es lineal la transformación

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \to & (x^2,y^2) \end{array}$$

Ejercicio 156. Verificar si es lineal la transformación

$$\begin{array}{cccc} T: & M_{2\times 2} & \longrightarrow & M_{2\times 2} \\ & A & \to & A+BA \end{array} \quad \text{donde } B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 157. Verificar si la transformación $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y)=(x+1,y+2)$ es lineal.

Ejercicio 158. Verifiar si es lineal la transformación

$$\begin{array}{cccc} T: & P_2 & \longrightarrow & P_3 \\ & a+bx+cx^2 & \to & b-bx+ax^3 \end{array}$$

Ejercicio 159. Si para una transformación lineal T se conoce que

$$\begin{array}{rcl} T(x-x^2) & = & 1-x \\ T(1+2x^2) & = & x^3 \\ T(2-x+x^2) & = & -1+x+2x^3 \end{array}$$

a. Halle la imagen por T del vector $3+x+x^2$.

b. Halle la transformación T.

Ejercicio 160. Dada la transformación lineal

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \to & \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ x-y \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

a. Halle $\mathrm{nu}(T)$.

b. Halle $\rho(T)$.

c. Halle $\mathrm{img}(T)$.

Ejercicio 161. Dada la transformación lineal

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \to & \begin{pmatrix} x-y \\ y \\ x+z \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

a. Halle $\mathrm{img}(T)$.

b. Halle las dimensiones de $\mathrm{nu}(T)$ e $\mathrm{img}(T)$.

c. ¿Pertenece el vector $(1,1,1)$ a $\mathrm{nu}(T)$?

d. ¿Es T sobreyectiva?

Ejercicio 162. Dada la transformación

$$\begin{array}{cccc} T: & M_{2\times 2} & \to & M_{2\times 2} \\ & A & \to & A+BA \end{array} \quad \text{donde } B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Demostrar que es lineal.

b. Hallar $\mathrm{img}(T)$, $\rho(T)$.

c. Hallar $\mathrm{nu}(T)$, $\nu(T)$.

d. ¿Es T sobreyectiva?

Ejercicio 163. Hallar el núcleo de

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} & \to & \begin{pmatrix} a+b \\ c \\ c \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejercicio 164. Hallar el núcleo y el rango de

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ x-y \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejercicio 165. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -4 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, determinar si el vector $(1, 4, -1, 2)$ pertenece al núcleo de A.

Ejercicio 166. Sea

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{pmatrix} 2x-y \\ y \\ x+y \end{pmatrix} \end{array}$$

Hallar la matriz asociada (de transformación) para las bases canónicas.

Ejercicio 167. Sea

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & (a,b) & \rightarrow & (a, a+b, -b, b-a) \end{array}$$

Hallar la matriz asociada (de transformación) para las bases canónicas.

Ejercicio 168. Sea P_3 el espacio vectorial de los polinomios en t con coeficientes reales, de grado menor o igual a 3; y sea

$$\begin{array}{cccc} D: & P_3 & \longrightarrow & P_3 \\ & p(t) & \rightarrow & \dfrac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} \end{array}$$

el operador diferencial definido por $D(p(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p(t))$. Hallar la matriz asociada a D para las bases canónicas.

Ejercicio 169. Dada la transformación

$$\begin{array}{cccc} T: & M_{2\times 2} & \longrightarrow & M_{2\times 2} \\ & A & \rightarrow & (A,B)B \end{array} \quad \text{donde } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

a. Hallar la matriz asociada A_T.

b. Hallar $\nu(T)$ y $\rho(T)$.

Ejercicio 170. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

con $x, y, z \in \mathbb{R}$ y además, $T\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 36 \\ 14 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a. Halle $T\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

b. Halle la matriz asociada a la transformación T

c. Halle $\nu(T)$ y $\rho(T)$

Autovalores y autovectores. Matrices semejantes y diagonalización.

Ejercicio 171. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, comprobar si los vectores $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ son autovectores (vectores propios) de A.

Ejercicio 172. Hallar los autovalores de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 173. Hallar los autovalores de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 174. Hallar los autovalores de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 175. Hallar los autovalores de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 176. Hallar los espacios propios de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 177. Hallar los espacios propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 178. Hallar los espacios propios de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 179. Hallar los espacios propios de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 180. Demostrar que si λ es autovalor de A, entonces $\lambda + c$ es autovalor de $A + cI$.

Ejercicio 181. Demuestre que si A es invertible y λ es autovalor de A, entonces $\frac{1}{\lambda}$ es autovalor de A^{-1}.

Ejercicio 182. Sean A y B matrices $n \times n$, con A invertible.

a. Demuestre que AB y BA tienen el mismo conjunto de autovalores.

b. Sea $C = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Si se sabe que existen matrices simétricas A y B de tamaño 2×2 tales que $C = AB$, encuentre los autovalores de C^t.

Ejercicio 183. Comprobar si $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

Ejercicio 184. Comprobar si $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

Ejercicio 185. Determinar si $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

Ejercicio 186. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Halle sus autovalores y espacios propios.

b. Si es diagonalizable, halle la matriz diagonalizante C y la matriz diagonal D.

c. Explique por qué la matriz D, si existe, es semejante a la matriz A.

Ejercicio 187. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

a. Calcule los autovalores de A y los espacios propios asociados a ellos.

b. Diagonalice ortogonalmente a la matriz A.

Ejercicio 188. Determinar los autovalores y autovectores de $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Ejercicio 189. Determinar a, b, c, d, e, f sabiendo que los vectores $(1, 1, 1)$, $(1, 0, -1)$ y $(1, -1, 0)$ son autovectores de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$

Ejercicio 190. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & q \\ 3 & 0 & p \end{pmatrix}$, ¿para qué valores de p y q es A diagonalizable?

Ejercicio 191. Sea A una matriz de tamaño $n \times n$, λ uno de sus autovalores y $\vec{x}$ el autovector asociado a λ.

a. Pruebe por inducción que λ^k, con k un número entero, es autovalor de A^k.

b. Si $A = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, determine los autovalores de A^5.

Ejercicio 192. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

a. ¿Es A diagonalizable?

b. Calcule A^{20}.